**«Вычисления сингулярных значений и сингулярных векторов бидиагональной матрицы с высокой относительной точностью»**

**Искенеева Камиля КМБО-01-20**

[**kamila.iskeneeva@yandex.ru**](mailto:kamila.iskeneeva@yandex.ru)

**tg:Iskam17**

**Краткие сведения**

**Матрицы**

***Бидиагональная матрица*** – матрица с ненулевыми элементами вдоль главной диагонали и диагональю выше (ниже).

– верхняя бидиагональной матрица

- нижняя бидиагональной матрица

***Супердиагональ квадратной матрицы*** – это диагональ, состоящая из элементов, которые лежат непосредственно над элементами, составляющую главную диагональ. Индексы супердиагональных элементов: .

***Блочная матрица*** – представление матрицы, при котором она рассекается вертикальными и горизонтальными линиями на прямоугольные части – блоки:

,

где блок имеет размер для и .

**Сингулярное разложение (SVD)**

Неотрицательное вещественное число называется ***сингулярным числом*** матрицы *A*, когда существуют два вектора единичной длины и такие, что:

, и

Векторы *u* и *v* называются, соответственно, **левым сингулярным вектором** и **правым сингулярным вектором**, соответствующим сингулярному числу .

***Сингулярное разложение (Singular******Value******Decomposition - SVD)*** *матрицы размера*  ***–*** разложение вида:

*,*

где где . матрицы, чьи столбцы представляют собой векторы, образующие ортонормированные базисы в пространствах и соответственно.

**Алгоритм “Разложение по сингулярным значениям бидиагональной матрицы с высокой относительной точностью»**

На вход алгоритма поступает верхняя бидиагональной матрица размером .

На выходе ожидаются диагональная матрица размером с сингулярными значениями, а также ортогональные матрицы *U* и *V* размеромтакие, что .

Опишем пошагово алгоритм:

1. Вычислим , где = .
2. Вычислим .
3. Повторяем следующие действия:
4. Для всех положим , если выполнен критерий сходимости.
5. Определим наименьшее значение p и наибольшее значение q так, чтобы матрица B стала блочной.

*,*

где – матрица размера ; – матрица размера , у которой элементы, лежащие на супердиагонали, ненулевые; – диагональная матрица размера .

1. Если , то диагональ матрицы – это диагональ матрицы B. Останавливаемся.
2. Если для , то

Применим вращения Гивенса так, чтобы и матрица оставалась верхней бидиагональной.

В противном случае

Необходимо применить следующий алгоритм.

Алгоритм «Шаг Деммеля–Кахана»

На вход поступают числа  *и ,* матрицы *,* где – верхняя бидиагональная матрица размера *;* исостоят из ортогональных векторов таких, что ; значения и .

На выходе ожидаются матрицы такие, что ; исостоят из ортогональных векторов; матрица *B* имеет меньшие недиагональные элементы, чем на входе. В памяти матрицы перезаписываются.

Опишем пошагово алгоритм:

1. Пусть – блок матрицы , состоящий только из элементов главной диагонали матрицы B, c индексами строк и столбцов вида .
2. Если , тогда:
   1. Определяем значение , как
   2. Для
      * Введем значения ;
      * Определим *c* и *s*:
      * Если то
      * Переопределим матрицу *P*– матрица вращений.
      * Переопределим значения так, что .
      * Определим :
      * Переопределим матрицу *Q* – матрица вращений.
      * .
   3. .

В противном случае

* 1. Применяем алгоритм «Шаг Голуб–Кахана» к *n, p, q, B, Q, P*.

**Список литературы**

1. Alan Kaylor Cline and Inderjit S. Dhillon. Handook of Linear Algebra. Computation of the Singular Value Decomposition, 45:1-13, 2006
2. G.H. Golub and W.Kahan. Calculating the Singular Values and Pseudoinverse of a Matrix, SIAM J.Number., Ser. B 2:205-224, 1965
3. J.W.Demmel and W.Kahan. Accurate singular values of bidiagonal matrices, SIAM J.Stat.Comp.: 873-912, 1990